جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الثاني للعام الدراسي ٢٠١٦ / ٢٠١٧
المادة: نظرية القياس – السنة الثالثة رياضيات
العلامة: ١٠٠ درجة. المدة: ساعة ونصف. اسم الطالب:

السؤال الأول (٢٥ درجة):

(أ) عرف كلاً من : نصف الحلقة ، الحلقة ، الجبر ، σ – الحلقة ، σ – الجبر.

(ب) لتكن المجموعة $X=\{a\,,b\,,c\}$.

المطلوب : اكتب (بدون إثبات) : نصف حلقة و حلقة و جبر و σ – حلقة و σ – جبر على X .

(جـ) بفرض $\mathcal{H}=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$ صف المجموعات وحيدة العنصر في X . ما هو σ – الجبر المولد بالصف $\mathcal{H}$.

السؤال الثاني (٣٢ درجة):

(أ) عرف كلاً من : التطبيق القيوس و الدالة القيوسة مع ذكر مثال لكل منهما .

(ب) لتكن الدالتين $f\,,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ المعرفتين بالشكل:

$$f(x)=x^2\quad,\quad g(x)=\begin{cases}1 & ;\quad x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ 0 & ;\quad x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

أثبت أن هاتين الدالتين قيوستين ومحدودتين على المجموعة $E=[0,1]$ ، ثم بين أن الدالتين كمولتان حسب ليبيغ واحسب تكامل كل منهما .

السؤال الثالث (١٨ درجة):

أحسب قياس المجموعات التالية بحسب : قياس ليبيغ ، قياس العد ، القياس الصفري :

$$A=\{0\,,1\}\ ,\ B=\{-2\,,-1,0\,,1\,,2\}\ ,\ C=[0,1],$$
$$D=[0,1]\cup[10,20]\ \ ,\ E=[0,1]\cap\mathbb{Q}\ \ ,\ D=]-\infty,1].$$

السؤال الرابع (٢٥ درجة):

أجب عن **واحد فقط** (إما (س ١) أو (س ٢)) من السؤالين التاليين:

(س ١) (أ) عرف كلاً من : القياس - القياس الخارجي - المجموعة القيوسة .

(ب) اكتب نص مبرهنة كاراتيودوري مع اثباتها .

(س ٢) (أ) إذا كانت X مجموعة منتهية وكان $\mathcal{H}$ صف المجموعات وحيدة العنصر منها ، فأثبت أن

$$\mathcal{F}_\sigma(\mathcal{H})=2^X$$

(ب) عرف جبر بوريل في كل من $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^n$.

(جـ) اذكر ثلاث مجموعات من $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ وثلاث مجموعات من $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.

(د) أثبت أن الصف $\mathcal{I}=\{]a,b[\,;\,a,b\in\mathbb{R}\}$ يولد جبر بوريل $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

مع التمنيات بالتوفيق والنجاح   مدرس المادة : د. إبراهيم إبراهيم

حمص في ١٣ / ٦ / ٢٠١٧ .

(١)

...عة البعث
...ة العلوم
...م الرياضيات

سلم التصحيح لمادة نظرية القياس
السنة الثالثة رياضيات
الفصل الثاني للعام الدراسي ٢٠١٦ / ٢٠١٧

السؤال الأول (٥٠ درجة):

(أ) نصف الحلقة: نقول عن صف S (من مجموعة أجزاء X) إنه يشكل نصف حلقة على X إذا حقق ما يلي:

(1) $A \cap B \in S \; ; \forall A, B \in S$

(2) $\forall A, B \in S \Rightarrow \exists C_1, C_2, \dots, C_n \in S : A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$
منفصلة مثنى

الحلقة: نقول عن الصف $\mathcal{R}$ إنه يشكل حلقة على X إذا حقق ما يلي:

(1) $A \cup B \in \mathcal{R} \; ; \forall A, B \in \mathcal{R}$,

(2) $A \setminus B \in \mathcal{R} \; ; \forall A, B \in \mathcal{R}$.

الجبر: هو حلقة فيها $X \in \mathcal{R}$.

σ - الحلقة: نقول عن الصف $\mathcal{R}$ إنه يشكل σ - حلقة على X إذا حقق:

(1) $A \setminus B \in \mathcal{R} \; ; \forall A, B \in \mathcal{R}$,

(2) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R} \; ; \forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{R}$

σ - الجبر: هو σ - حلقة فيها X

(ب) لدينا $X = \{a, b, c\}$.

كل من الصفين 2^X و $\{\phi, X\}$ يعتبر مثالاً عن نصف الحلقة والحلقة والجبر و σ - الحلقة و σ - الجبر.
كما يمكن تشكيل صفوف أخرى ... حسب معرفة الطالب.

(ج) لدينا: $\mathcal{H} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$، عندئذ يكون (يجب برهنة = تبرير الحلول)
$$F_\sigma(\mathcal{H}) = 2^X$$

السؤال الثاني (٢٢ درجة):

أ) التطبيق القيوس: نقول عن التطبيق $T:(X,\mathcal{F})\to(X',\mathcal{F}')$ إنه $(\mathcal{F}-\mathcal{F}')$ قيوس إذا كان $T^{-1}(\mathcal{F}')\subset\mathcal{F}$ (أو برهنة مطابقة).

مثال: التطبيق الثابت (أو التطبيق المستمر)

الدالة القيوسة: نقول إن الدالة $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ قيوسة إذا كانت المجموعة $E(f>c)$ قيوسة من أجل كل عدد حقيقي c (أو $f^{-1}]c,\infty[\in\mathcal{F}$)
كما يمكن ذكر المجموعات: $E(f\geq c)$ ، $E(f<c)$ ، $E(f\leq c)$.

مثال: الدالة الثابتة - الدالة المستمرة - دالة ديريخليه ... الخ.

ب) الدالة $f(x)=x^2$ مستمرة على $[0,1]$ فهي قيوسة (وعكسه حسب $E(f>c)$) =

الدالة $g(x)$ قيوسة لأن:

$$E(g>c)=\begin{cases}[0,1] & ; c<0\\ [0,1]\cap\mathbb{Q} & ; 0\leq c<1\\ \phi & ; c\geq 1\end{cases}$$

والمجموعات في الطرف الأيمن كلها قيوسة.

لدينا أيضاً:

$$|f(x)|=|x^2|\leq 1 \qquad ; \forall x\in[0,1]$$

$$|g(x)|\leq 1 \qquad ; \forall x\in[0,1]$$

أي أن الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ محدودتين، وهما قيوستان كما سبق، لذلك منهما كمولتان حسب ليبيغ وتكاملهما هو:

$$\int_{[0,1]} f(x)\,d\lambda=(R)\int_0^1 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big]_0^1=\frac{1}{3},$$

$$\int_{[0,1]} g(x)\,d\lambda=\int_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} 1\,d\lambda+\int_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}} 0\,d\lambda=0+0=0.$$

السؤال الثالث (١٨ درجة):

المجموعة	قياس ليبيغ	قياس العد	القياس الصفري
$A = \{0,1\}$	0	2	0
$B = \{-2,-1,0,$	0	4	0
$C = [0,1]$	1	∞	0
$D = [0,1] \cup [10,$	$1+10=11$	∞	0
$E = [0,1] \cap \mathbb{Q}$	0	∞	0
$F =]-\infty, 1]$	∞	∞	0

السؤال الرابع (٢٥ درجة) (اختياري)

(س١) القياس: هو دالة مجموعات:

(أ) $\mu : \mathcal{H} \longrightarrow]-\infty,\infty]$; $A \longmapsto \mu(A)$

بحيث يتحقق ما يلي:

(١) $\mu(\phi) = 0$

(٢) $\mu(A) \geq 0$ من أجل كل $A \in \mathcal{H}$.

(٣) إذا كانت $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{H}$ منفصلة مثنى مثنى و $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{H}$ فإن:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

القياس الخارجي: هو دالة مجموعات

$$\mu^* : 2^X \longrightarrow]-\infty,+\infty] \ ; A \longmapsto \mu^*(A)$$

بحيث يتحقق ما يلي:

(١) $\mu^*(\phi) = 0$

(٢) إذا كانت $A \subset B$ فإن $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

(٣) $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$; $A_i \in 2^X$

المجموعة القيوسة: نقول إن المجموعة E قيوسة وفق μ^* إذا كان:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \ ; \forall A \in 2^X$$

ب) برهنة كاراثيودوري:

ليكن μ^* قياساً خارجياً على 2^X وليكن $\mathcal{M}_{\mu^*}$ صف المجموعات القيوسة وفق μ^*.
عندئذ يكون $\mathcal{M}_{\mu^*}$ σ - جبر على X، ومقصور μ^* على $\mathcal{M}_{\mu^*}$ يعرف قياساً نرمز له بـ $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$، إضافة لذلك فإن μ تام على $\mathcal{M}_{\mu^*}$.

الإثبات: (٠) إثبات أن $\mathcal{M}_{\mu^*}$ σ - جبر على X.

- نعلم أن $\phi, X \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ لأنهما مجموعتان قيوستان.
- إذا كانت $E, G \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ فهما قيوستان وبالتالي $E \setminus G \in \mathcal{M}_{\mu^*}$.
- إذا كانت $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ فيكون اجتماعها مجموعة قيوسة وبالتالي $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{M}_{\mu^*}$.

بذلك يكون $\mathcal{M}_{\mu^*}$ σ - جبر على X.

لنضع الآن $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ فيكون لدينا:

(١) $\mu(\phi) = \mu^*(\phi) = 0 \quad ; \phi \in \mathcal{M}_{\mu^*}$

(٢) $\mu(A) = \mu^*(A) \geq 0 \quad ; \forall A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$

(٣) إذا كانت $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ ومنفصلة مثنى مثنى فإن:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) ,$$ (الخاصة σ - الجمع التام)

بذلك يكون μ قياساً على $\mathcal{M}_{\mu^*}$.

لإثبات أن μ تام نفرض أن

$$E \in \mathcal{M}_{\mu^*} , \ \mu^*(E) = 0 , \ F \subset E$$

ونثبت أن $F \in \mathcal{M}_{\mu^*}$. وفي الواقع لدينا من أجل أية $A \in 2^X$:

$$\mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap F^c) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*\left((A \cap E^c) \cup (A \cap (E \setminus F))\right)$$
$$\leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) = \mu^*(A)$$

وينتج من ذلك أن $F \in \mathcal{M}_{\mu^*}$، وبالتالي μ قياس تام.

س٢) (أ) لنفرض أن X مجموعة منتهية وفيها n عنصر:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

عندئذ يكون

$$\mathcal{H} = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_n\}\}$$
$$= \bigcup_{i=1}^{n} \{\{x_i\}\}$$

بما أن $\mathcal{H} \subset 2^X$ فيكون $\mathcal{F}_\sigma(\mathcal{H}) \subset 2^X$. (1) .

من ناحية ثانية: من أجل $k \le n$ و $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ يكون

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} \{x_i\} \in \mathcal{F}_\sigma(\mathcal{H}) \; ; \; k \le n$$

وبالتالي $2^X \subset \mathcal{F}_\sigma(\mathcal{H})$ (2) .

من (1) و (2) نستنتج المساواة $\mathcal{F}_\sigma(\mathcal{H}) = 2^X$.

س٢) (أ) جبر بوريل في $\mathbb{R}$ (أو $\mathbb{R}^n$) ، هو σ - الجبر المولّد بصف المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$ (أو $\mathbb{R}^n$).

(ب) مجموعات بوريلية من $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$: ϕ و $\mathbb{R}$ و $\mathbb{N}$ (أو أي مجالات)

مجموعات بوريلية من $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$: ϕ و $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{N}^3$ (أو جداء مجالات).

(ج) $\mathcal{J} = \{]a,b[: a,b \in \mathbb{R}\}$ يولّد $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

الإثبات: بما أن المجال $]a,b[$ مجموعة مفتوحة فإن $\mathcal{J} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

وبالتالي: $\mathcal{F}_\sigma(\mathcal{J}) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

من ناحية ثانية: إذا كانت E مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ (أي $E \in \mathcal{O}$) فيمكن كتابتها بالشكل: $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[$ وبالتالي $E \in \mathcal{F}_\sigma(\mathcal{J})$

وبالتالي $\mathcal{O} \subset \mathcal{F}_\sigma(\mathcal{J})$ وبالتالي $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{F}_\sigma(\mathcal{O}) \subset \mathcal{F}_\sigma(\mathcal{J})$.

وبذلك يكون $\mathcal{F}_\sigma(\mathcal{J}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. وهو المطلوب.

مدرس المقرر: د. ابراهيم ابراهيم